2024年　東大数学　文系第4問

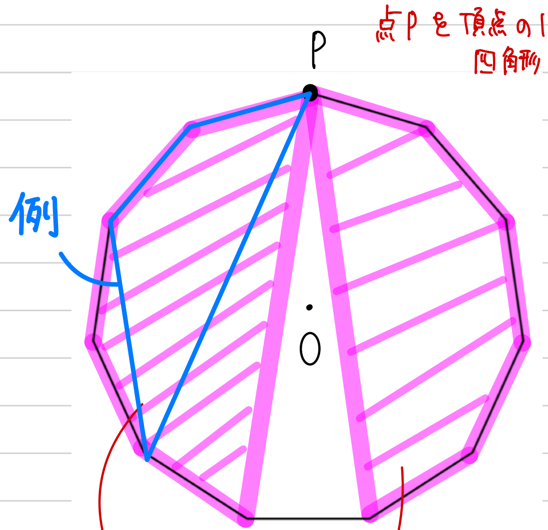
四角形の選び方は、n個の頂点のうち4つを選ぶので、

$_nC_4$ 通り

余事象の「Oを内部に含まない四角形」を考える。

たくさん四角形を描いてみて、（ピンク）の領域に四角形を描けば良いことがわかる

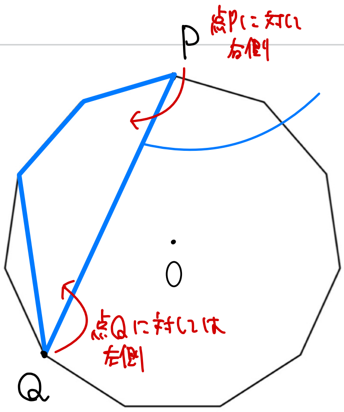
点Pを頂点の1つとする四角形をつくる場合、



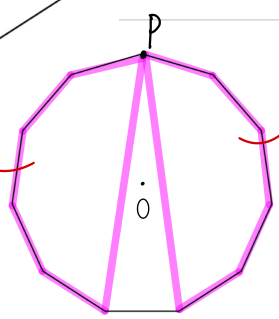
このどっちかの領域内で4点とれば、内部にOを含まない。

・点Pの選び方は n通り。

しかし、点Pに対して、両側の領域から他の頂点を選べるようにすると、あとで重複が生じるので、片側だけで考える



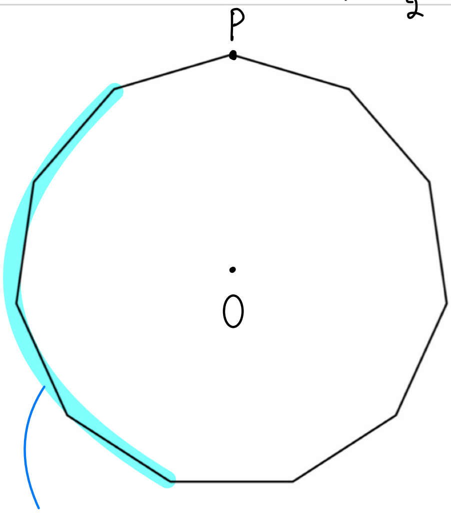
この四角形は、点Pのときの右側の領域としても点Qのときの左側の領域としても数えあげることになる。

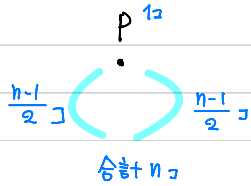


こっちだけ数える

こっちも数えると重複するので数えない。

・他の3つの頂点の選び方は $\frac{n-1}{2}$ 通り





ここにある頂点は $\frac{n-1}{2}$ 個

$\frac{n-1}{2}$ 個の頂点のうち3個を選べばよいので、

$_{\frac{n-1}{2}}C_3$ 通り

コレは余事象

よって、点Oを含まない四角形は $n\times {}_{\frac{n-1}{2}}C_3$ 通り

点Oを含む四角形は $\underbrace{_nC_4}_{\text{全部}} - \underbrace{n\times {}_{\frac{n-1}{2}}C_3}_{\text{含まない}}$ 通り

求める確率は、$\dfrac{_nC_4 - n\times {}_{\frac{n-1}{2}}C_3}{_nC_4}$　あとは計算!!

$$_nC_4 = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{4\times3\times2\times1} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n\times {}_{\frac{n-1}{2}}C_3 = n\times\frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-5}{2}}{3\times2\times1} = \frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)$$ より

$$\frac{_nC_4 - n\times {}_{\frac{n-1}{2}}C_3}{_nC_4} = \frac{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) - \frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)}{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$= \frac{2(n-2)-(n-5)}{2(n-2)}$$

$$= \frac{n+1}{2(n-2)}$$

//